MA2: Partiel de Math L1 MASS du 23/3/2013 9h00-12h00, 2A et 5C

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits et doivent être rangés.

Exercice I:

1) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x,y,z) = (z - y - x, z - 3y + x, -2y + 2x)$$

Donnez la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.

2) a) Déterminez $\ker f$.

b) L'application f est elle surjective?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de a le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ est il dans l'image de f?

3) a) Donnez une base du noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) En déduire sans calculs le rang de la matrice précédente.

4) a) Montrer que $(\ker f) \cap \ker(f + 2id) = \{0\}$.

b) A t'on $\mathbb{R}^3 = (\ker f) \oplus \ker(f + 2id)$?

5) On considère les vecteurs de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$u_0 = (1,1,2), u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1)$$

a) Montrez que (u_0, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Quelle est la matrice P de passage de la base canonique à la base u_0, u_1, u_2?

c) Déterminez en fonction de (u_0, u_1, u_2) les images par f des vecteurs (u_0, u_1, u_2).

d) En déduire sans calculer P^{-1} la valeur de $D = P^{-1}.A.P$

6) a) Quel est l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) a) Expliquez comment obtenir A^n à partir de D^n. (On fera le calcul dans la question suivante)

b) Calculez A^n.

Exercice II:

On considère la projection p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image la droite $x + 2y = 0$ et parallèlement à la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Quelle est la matrice B de p dans la base (au départ et à l'arrivée): $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Quelle est la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (au départ et à l'arrivée).

Exercice III:

On considère l'espace vectoriel E des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1) Montrer que l'application: $\Psi : \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ P(x) & \mapsto & P'(x) - P''(x-1) \end{array}$ est linéaire.

2) Donnez la matrice B dans la base $(1, x, x^2, x^3)$ de l'application précédente.
3) a) Calculez B^2.
b) Calculez B^4.

Exercice IV:

On considère une application linéaire ϕ non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$. On suppose qu'il existe un vecteur non nul dans le noyau de ϕ. Que pouvez vous dire du rang de ϕ? (On énoncera clairement (mais sans démonstration) les résultats de cours utilisés pour répondre)

Exercice V:

1) a) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 4 de

$$f = e^{2x+2x^2}.$$

b) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = 0$?
c) Quelle est la position de f par rapport à cette droite au voisinage de 0?
2) a) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction suivante:

$$\sin(x) + \alpha.x^3$$

b) Montrez qu'il existe une fonction ϵ continue et de limite nulle en 0 telle que:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - x + x^2} = 2 + 4x + 4x^2 + x^3\epsilon(x).$$

c) En déduire un développement limité en 0 à l'odre 4 de

$$g = 1 + \frac{\sin(x) + \alpha.x^3}{\frac{1}{2} - x + x^2}.$$

3) a) Si α vaut zéro, comparez les fonctions f et g au voisinage de 0.
b) Donnez une valeur de α pour que la fonction g soit inférieure à f sur un voisinage de 0